OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

19 februarie 2017

CLASA a VIII-a

1. Fie a și b numere reale astfel încât: $a^2+b^2-4a\left(1+\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)+6b\sqrt{2}+30=0$.

a) (5p) Determinați: $[a]$ și $[b]$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x.

b) (2p) Aflați partea întreagă a lui $c=\frac{b-\{b\}}{\{a\}}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

2. **(7p)** Arătați că:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}}+\frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}}+\ldots+\frac{x+y+2017}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2017)(y+2017)}}\geq 2017,$$

pentru orice x, y numere reale pozitive.

3. **(7p)** Fie O şi G centrele de greutate ale triunghiurilor $\triangle BCD$, respectiv $\triangle ACD$, situate în plane diferite, N mijlocul segmentului $[CD]$, $M\in(AB)$ astfel încât $\frac{AM}{AB}=\frac{2}{5}$ şi $MN\cap AO=\{E\}$. Să se arate că $EG\parallel(BCD)$.

4. Fie dreptunghiul $ABCD$ cu $AB=7\ cm$, $BC=8\ cm$ și punctele $E\in(BC), F\in(CD)$ astfel încât $BE=CF=1\ cm$. Se construiesc $EN\parallel AF$, $N\in(AB)$ și perpendiculara PN pe planul dreptunghiului, $PN=\frac{5\sqrt{2}}{2}\ cm$. Dacă M este mijlocul lui $[AF]$,

a) (3p) arătați că $PE\perp EM$;

b) (4p) determinați lungimea segmentului $[PM]$.

Notă: **1. Toate subiectele sunt obligatorii.**
2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.
3. Timp de lucru 3 ore.