OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

19 februarie 2017

CLASA a VII-a

1. a) (4p) Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ și $xy + xz + yz = 2017$, arătați că

$$\sqrt{\left(x^2+2017\right)\left(y^2+2017\right)\left(z^2+2017\right)} \in \mathbb{Q}.$$

b) (3p) Determinați numerele de forma $\overline{ab17}$**,** scrise în baza 10, $b < a$, știind că numărul

$$n = \sqrt{1,a(b7)+1,b(7a)+1,7(ab)} \in \mathbb{N}.$$

2. a) (4p) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $x^2 y - 5 = 3x + 2y$.

b) (3p) Dacă numerele reale x, y, z îndeplinesc condiţiile $x \geq 25$, $y \geq 36$, $z \geq 49$, arătaţi că:

$$5\sqrt{x-25}+6\sqrt{y-36}+7\sqrt{z-49} \leq \frac{x+y+z}{2}.$$

3. Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului oarecare ΔABC considerăm punctele E, respectiv D. Fie F şi G două puncte astfel încât $EF \parallel BD$ şi $[EF] \equiv [BD]$, respectiv $DG \parallel EC$ şi $[DG] \equiv [EC]$. Să se arate că :

a) (3p) $BCFG$ este paralelogram ;

b) (4p) $ED + BF + CG > 2FC$.

4. Fie patrulaterul convex $ABCD$ cu $P \in (DC)$ astfel încât $AP \parallel BC$ și $BP \parallel AD$.

a) (4p) Dacă $AP \cap BD = \{M\}$ și $BP \cap AC = \{N\}$, arătați că $MN \parallel DC$.

b) (3p) Dacă $T \in (AB)$ astfel încât $NT \parallel AP$, atunci $[MT] \equiv [PN]$.

Notă: **1. Toate subiectele sunt obligatorii.**

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.