BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VIII-a

1. Fie a și b numere reale astfel încât: $a^2+b^2-4a\left(1+\sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)+6b\sqrt{2}+30=0$.

a) (5p) Determinați: [a] și [b], unde [x] reprezintă partea întreagă a lui x.

b) (2p) Aflați partea întreagă a lui $c=\dfrac{b-\{b\}}{\{a\}}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x.

Prof. Tamara Brutaru

***Soluție*: a)** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\left|\sqrt{3}-1\right|=\sqrt{3}-1$

Egalitatea devine: $a^2+b^2-4a\sqrt{3}+6b\sqrt{2}+30=0$. De unde, $\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+\left(b+3\sqrt{2}\right)^2=0$

Cum $\left(a-2\sqrt{3}\right)^2\geq 0$, $\left(b+3\sqrt{2}\right)^2\geq 0$, avem $a=2\sqrt{3},\quad b=-3\sqrt{2}$.

Din $a\in[3,4)\Rightarrow[a]=3,\quad b\in[-5,-4)\Rightarrow[b]=-5$.

b) $c=\dfrac{-5}{2\sqrt{3}-3}=-\dfrac{10\sqrt{3}}{3}-5\Rightarrow c\in[-11,-10)\Rightarrow[c]=-11$

Barem:

a) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}=\left\|\sqrt{3}-1\right\|=\sqrt{3}-1$	**1p**
$a^2+b^2-4a\sqrt{3}+6b\sqrt{2}+30=0$	**1p**
$\left(a-2\sqrt{3}\right)^2+\left(b+3\sqrt{2}\right)^2=0$	**1p**
$a=2\sqrt{3},\quad b=-3\sqrt{2}$	**1p**
$a\in[3,4)\Rightarrow[a]=3,\quad b\in[-5,-4)\Rightarrow[b]=-5$	**1p**
b) $c=\dfrac{-5}{2\sqrt{3}-3}=-\dfrac{10\sqrt{3}}{3}-5$	**1p**
$-\dfrac{10\sqrt{3}}{3}-5\in[-11,-10)\Rightarrow[c]=-11$	**1p**

2. **(7p)** Arătați că:

$$\frac{x+y+1}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+1)(y+1)}}+\frac{x+y+2}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2)(y+2)}}+...+\frac{x+y+2017}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+2017)(y+2017)}}\geq 2017,$$

pentru orice x, y numere reale pozitive.

Gazeta matematică Nr.5/2016

Soluție. Arătam că pentru orice x, y numere reale pozitive și orice k număr natural nenul are loc $\dfrac{x+y+k}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+k)(y+k)}}\geq 1.\quad (1)$ Prin însumarea relațiilor (1) de la $k=1$ la $k=2017$ obținem relația de demonstrat. Relația (1) se demonstrează prin raționalizarea numitorului obținându-se $\dfrac{(x+y+k)\left(\sqrt{(x+k)(y+k)}-\sqrt{xy}\right)}{k(x+y+k)}\geq 1\Leftrightarrow\sqrt{(x+k)(y+k)}\geq k+\sqrt{xy}$

Prin ridicare la pătrat: $xy+xk+yk+k^2\geq k^2+2k\sqrt{xy}+xy\Leftrightarrow x+y\geq 2\sqrt{xy}$, adevărată din inegalitatea mediilor.

Barem.

$\dfrac{x+y+k}{\sqrt{xy}+\sqrt{(x+k)(y+k)}} \geq 1. \quad (1) \Leftrightarrow$	**2p**
$\Leftrightarrow \dfrac{(x+y+k)\left(\sqrt{(x+k)(y+k)}-\sqrt{xy}\right)}{k(x+y+k)} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x+k)(y+k)} \geq k+\sqrt{xy}$	**2p**
Prin ridicare la pătrat: $xy+xk+yk+k^2 \geq k^2+2k\sqrt{xy}+xy \Leftrightarrow x+y \geq 2\sqrt{xy}$, adevărată din inegalitatea mediilor	**2p**
Prin însumarea relațiilor (1) de la *k=1* la *k =2017* obținem relația de demonstrat.	**1p**

3. **(7p)** Fie *O* şi *G* centrele de greutate ale triunghiurilor $\triangle BCD$, respectiv $\triangle ACD$, situate în plane diferite, *N* mijlocul segmentului $[CD]$, $M \in (AB)$ astfel încât $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{2}{5}$ şi $MN \cap AO=\{E\}$. Să se arate că $EG \parallel (BCD)$.

prof. Laura Schroder

Soluţie.

Prin aplicarea teoremei lui Menelaus în triunghiul ABO pentru punctele coliniare M, E, N se obţine: $\dfrac{MA}{MB}\cdot\dfrac{NB}{NO}\cdot\dfrac{EO}{EA}=1 \quad (1)$. Dar $\dfrac{MA}{AB}=\dfrac{2}{5} \Rightarrow \dfrac{MA}{AB-MA}=\dfrac{2}{5-2} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$, iar $\dfrac{NB}{NO}=3$, deoarece O centrul de greutate al triunghiului BCD. Din (1) va rezulta $\dfrac{2}{3}\cdot 3\cdot\dfrac{EO}{EA}=1$ sau $\dfrac{EO}{EA}=\dfrac{1}{2} \quad (2)$.

Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ADC rezultă că : $\dfrac{GN}{GA}=\dfrac{1}{2} \quad (3)$. Din (2) şi (3) $\Rightarrow \dfrac{EO}{EA}=\dfrac{GN}{GA} \Rightarrow \left.\begin{matrix} EG \parallel ON \\ ON \subset (BCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow EG \parallel (BCD)$.

Barem.

Prin aplicarea teoremei lui Menelaus în triunghiul ABO pentru punctele coliniare M, E, N se obţine: $\dfrac{MA}{MB}\cdot\dfrac{NB}{NO}\cdot\dfrac{EO}{EA}=1 \quad (1)$	**1p**
$\dfrac{MA}{AB}=\dfrac{2}{5} \Rightarrow \dfrac{MA}{AB-MA}=\dfrac{2}{5-2} \Rightarrow \dfrac{MA}{MB}=\dfrac{2}{3}$	**1p**
$\dfrac{NB}{NO}=3$, deoarece O centrul de greutate al triunghiului BCD.	**1p**
Din (1) va rezulta $\dfrac{2}{3}\cdot 3\cdot\dfrac{EO}{EA}=1$ sau $\dfrac{EO}{EA}=\dfrac{1}{2} \quad (2)$.	**1p**
Deoarece G este centrul de greutate al triunghiului ADC rezultă că: $\dfrac{GN}{GA}=\dfrac{1}{2} \quad (3)$.	**1p**
Din (2) şi (3) $\Rightarrow \dfrac{EO}{EA}=\dfrac{GN}{GA} \Rightarrow \left.\begin{matrix} EG \parallel ON \\ ON \subset (BCD) \end{matrix}\right\} \Rightarrow EG \parallel (BCD)$.	**2p**

4. Fie dreptunghiul *ABCD* cu $AB=7\ cm$, $BC=8\ cm$ și punctele $E \in (BC), F \in (CD)$ astfel încât $BE=CF=1\ cm$. Se construiesc $EN \parallel AF$, $N \in (AB)$ și perpendiculara *PN* pe planul dreptunghiului, $PN=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\ cm$. Dacă *M* este mijlocul lui $[AF]$,

a) (3p) arătați că $PE \perp EM$;

b) (4p) determinați lungimea segmentului $[PM]$.

<u>Soluţie.</u>a) $\triangle ABE \equiv \triangle ECF\,(C.C.) \Rightarrow AE = EF \Rightarrow \triangle AEF$ isoscel; M este mijlocul lui $[AF] \Rightarrow EM \perp AF$, dar $EN \parallel AF$, de unde $\Rightarrow EN \perp EM$. Cum $PN \perp (ABC)$, conform teoremei celor 3 perpendiculare rezultă că $PE \perp EM$.

b) În $\triangle ADF \xrightarrow{T.P.} AF = 10\,cm$, în $\triangle ABE \xrightarrow{T.P.} AE = 5\sqrt{2}cm$, în $\triangle AEM \xrightarrow{T.P.} EM = 5\,cm$.

$\triangle NBE \sim \triangle FDA\,(u.u.) \Rightarrow NE = \frac{5}{4}$. În $\triangle MNE \xrightarrow{T.P.} MN = \frac{5\sqrt{17}}{4}cm$. În $\triangle PMN \xrightarrow{T.P.} PM = 6,25\,cm$

<u>Barem:</u>

a) $\triangle ABE \equiv \triangle ECF\,(C.C.) \Rightarrow AE = EF \Rightarrow \triangle AEF$ isoscel; M este mijlocul lui $[AF] \Rightarrow EM \perp AF$	**1p**
$EN \parallel AF$, de unde $\Rightarrow EN \perp EM$	**1p**
Cum $PN \perp (ABC)$, conform teoremei celor 3 perpendiculare rezultă că $PE \perp EM$.	**1p**
b) În $\triangle ADF \xrightarrow{T.P.} AF = 10\,cm$, în $\triangle ABE \xrightarrow{T.P.} AE = 5\sqrt{2}cm$, în $\triangle AEM \xrightarrow{T.P.} EM = 5\,cm$	**2p**
$\triangle NBE \sim \triangle FDA\,(u.u.) \Rightarrow NE = \frac{5}{4}$	**1p**
În $\triangle MNE \xrightarrow{T.P.} MN = \frac{5\sqrt{17}}{4}cm$. În $\triangle PMN \xrightarrow{T.P.} PM = \frac{25}{4} = 6,25\,cm$.	**1p**

Notă:
Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.