BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE
CLASA a VII-a

1. a) (4p) Dacă $x, y, z \in \mathbb{Q}_+$ și $xy + xz + yz = 2017$, arătați că

$$\sqrt{\left(x^2+2017\right)\left(y^2+2017\right)\left(z^2+2017\right)} \in \mathbb{Q}.$$

Prof. Gabriela Sascău

b) (3p) Determinați numerele de forma $\overline{ab17}$**,** scrise în baza 10, $b < a$, știind că numărul

$$n = \sqrt{1,a(b7)+1,b(7a)+1,7(ab)} \in \mathbb{N}.$$

Prof. Gheorghe Iacoviță

__Soluție:__ a) $x^2 + 2017 = x^2 + xy + xz + yz = x(x + y) + z(x + y) = (x + y)(x + z)$

Analog, $y^2 + 2017 = (x + y)(y + z)$ și $z^2 + 2017 = (x + z)(y + z)$.

$$\sqrt{\left(x^2+2017\right)\left(y^2+2017\right)\left(z^2+2017\right)} = \sqrt{(x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2} = (x+y)(y+z)(x+z) \in \mathbb{Q}$$

b) Numărul n se mai poate scrie:

$$n = \sqrt{3+\frac{\overline{ab7}-a+\overline{b7a}-b+\overline{7ab}-7}{990}} \Leftrightarrow n = \sqrt{3+\frac{110a+110b+770}{990}} \Leftrightarrow n = \sqrt{3+\frac{a+b+7}{9}}$$

$\Leftrightarrow n = \dfrac{\sqrt{a+b+34}}{3}$; $n \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b+34$ trebuie să fie un număr natural pătrat perfect și cum $b < a \Rightarrow a = 2$ și $b = 0$ sau $a = 8$, $b = 7$; dar $\sqrt{a+b+34}$ trebuie să fie divizibil cu 3, deci singura soluție este $a = 2$ și $b = 0 \Rightarrow \overline{abcd} = 2017$.

__Barem:__

a)	Scrie $x^2 + 2017 = x^2 + xy + xz + yz = x(x + y) + z(x + y) = (x + y)(x + z)$	**1p**
	$y^2 + 2017 = (x + y)(y + z)$ și $z^2 + 2017 = (x + z)(y + z)$	**1p**
	$\sqrt{\left(x^2+2017\right)\left(y^2+2017\right)\left(z^2+2017\right)} = \sqrt{(x+y)^2(y+z)^2(x+z)^2} =$	**1p**
	$= (x+y)(y+z)(x+z) \in \mathbb{Q}$	**1p**
b)	Scrie n sub forma: $n = \sqrt{3+\frac{\overline{ab7}-a+\overline{b7a}-b+\overline{7ab}-7}{990}}$ și obține $n = \frac{\sqrt{a+b+34}}{3}$	**1p**
	$n \in \mathbb{N} \Rightarrow a+b+34$ pătrat perfect, $b < a \Rightarrow a = 2$ și $b = 0$ sau $a = 8$, $b = 7$	**1p**
	Finalizare, $\overline{abcd} = 2017$	**1p**

2. a) (4p) Rezolvați în mulțimea numerelor întregi ecuația: $x^2y - 5 = 3x + 2y$.

Prof. Gheorghe Iacoviță

b) (3p) Dacă numerele reale x, y, z îndeplinesc condiţiile $x \ge 25$, $y \ge 36$, $z \ge 49$, arătaţi că:

$$5\sqrt{x-25}+6\sqrt{y-36}+7\sqrt{z-49} \le \frac{x+y+z}{2}.$$

Prof. Ana Marcela Popa

__Soluție:__

a) Ecuația mai poate fi scrisă sub forma: $x^2y - 2y = 3x+5 \Leftrightarrow y(x^2-2) = 3x+5 \Leftrightarrow y = \dfrac{3x+5}{x^2-2} \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x^2-2 \mid 3x+5$ **(1)**; cum $x^2-2 \mid x^2-2 \Rightarrow x^2-2 \mid 3x^2-6$ și din (1), $x^2-2 \mid 3x^2+5x$, obținem

$x^2-2 \mid 3x^2+5x-3x^2+6 \Leftrightarrow x^2-2 \mid 5x+6$ **(2)**; din **(1)** și **(2)** obținem:

$x^2-2 \mid 15x+25-15x-18 \Leftrightarrow x^2-2 \mid 7 \Rightarrow x^2-2 \in D_7 = \{-7,-1,1,7\} \Leftrightarrow x^2 \in \{-5,1,3,9\}$.

Avem situațiile:

1) $x^2 = -5$ nu convine
2) $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$; dacă $x = -1 \Rightarrow y = -2$; dacă $x = 1 \Rightarrow y = -8$;
3) $x^2 = 3 \Rightarrow x \notin \mathbb{Z}$;
4) $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$; dacă $x = -3 \Rightarrow y \notin \mathbb{Z}$; dacă $x = 3 \Rightarrow y = 2$.

În concluzie, $(x, y) \in \{(-1,-2);(1,-8);(3,2)\}$.

b) Ştiind că $m_g \le m_a \Rightarrow 5\sqrt{x-25} = \sqrt{25(x-25)} \le \frac{x}{2}$ (1); $6\sqrt{y-36} = \sqrt{36(y-36)} \le \frac{y}{2}$ (2);

$7\sqrt{z-49} = \sqrt{49(z-49)} \le \frac{z}{2}$ (3). Din (1) + (2) + (3) $\Rightarrow 5\sqrt{x-25} + 6\sqrt{y-36} + 7\sqrt{z-49} \le$

$\le \frac{x+y+z}{2}$.

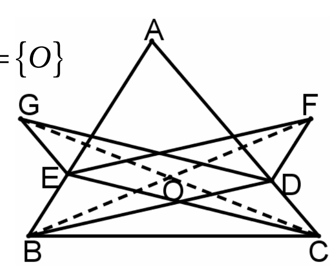
<u>Barem</u>:

a)	Scrie ecuația sub forma $x^2y - 2y = 3x + 5 \Leftrightarrow y(x^2-2) = 3x+5 \Leftrightarrow y = \frac{3x+5}{x^2-2} \in \mathbb{Z}$	**1p**
	$x^2-2 \mid 3x+5$; $x^2-2 \mid x^2-2 \Rightarrow x^2-2 \mid 3x^2-6$ și $x^2-2 \mid 3x^2+5x$	**1p**
	Obține $x^2-2 \mid 5x+6$ și $x^2-2 \mid 7 \Rightarrow x^2-2 \in D_7 = \{-7,-1,1,7\} \Leftrightarrow x^2 \in \{-5,1,3,9\}$	**1p**
	Finalizare: $(x,y) \in \{(-1,-2);(1,-8);(3,2)\}$	**1p**
b)	Scrie $m_g \le m_a \Rightarrow 5\sqrt{x-25} = \sqrt{25(x-25)} \le \frac{x}{2}$ (1); $6\sqrt{y-36} = \sqrt{36(y-36)} \le \frac{y}{2}$ (2); $7\sqrt{z-49} = \sqrt{49(z-49)} \le \frac{z}{2}$ (3)	**2p**
	(1) + (2) + (3) $\Rightarrow 5\sqrt{x-25} + 6\sqrt{y-36} + 7\sqrt{z-49} \le \le \frac{x+y+z}{2}$	**1p**

3. Pe laturile (AB) şi (AC) ale triunghiului oarecare ΔABC considerăm punctele E, respectiv D. Fie F şi G două puncte astfel încât $EF \parallel BD$ şi $[EF] \equiv [BD]$, respectiv $DG \parallel EC$ şi $[DG] \equiv [EC]$. Să se arate că :

a) (3p) $BCFG$ este paralelogram ;
b) (4p) $ED + BF + CG > 2FC$.

Prof. Laura Schroder



<u>Soluție</u>: a) Din $\left.\begin{array}{l} BD \parallel EF \\ [BD] \equiv [EF] \end{array}\right\} \Rightarrow BDFE$ paralelogram $\Rightarrow BF \cap ED = \{O\}$ astfel încât $[EO] \equiv [OD]$ (1) şi $[BO] \equiv [OF]$ (2). Analog $GECD$ paralelogram $\Rightarrow GC \cap ED = \{O'\}$ astfel încât $[EO'] \equiv [O'D]$ (3) şi $[GO'] \equiv [O'C]$ (4). Din (1), (3) şi unicitatea mijlocului unui segment $\Rightarrow O = O'$. Din (2) şi (4) şi $O = O' \Rightarrow BCFG$ este paralelogram. **b)** Într-un patrulater convex suma diagonalelor este mai mare decât suma a două laturi opuse. Atunci, în $BDFE$: $ED + BF > EF + BD$; în $ECDG$: $ED + CG > EC + DG$; în $BCFG$: $CG + BF > BG + CF$. Însumând cele trei relaţii obţinem: $2(ED + BF + CG) > FE + EC + BD + GD + FC + BG$ şi ținînd cont că în ΔECF, $FE + EC > FC$, iar în ΔBDG, $BD + GD > BG$, se obține: $2(ED + BF + CG) > 2FC + 2BG = 4FC$ ($FC = BG$, deoarece $BCFG$ paralelogram) $\Rightarrow ED + BF + CG > 2FC$.

Barem:

a)	*BDEF* paralelogram $\Rightarrow BF \cap ED = \{O\}$, $[EO] \equiv [OD]$ (1) şi $[BO] \equiv [OF]$ (2)	**1p**
	GECD paralelogram $\Rightarrow GC \cap ED = \{O'\}$, $[EO'] \equiv [O'D]$ (3) şi $[GO'] \equiv [O'C]$ (4).	**1p**
	Din (1), (3) şi unicitatea mijlocului unui segment $\Rightarrow O = O'$. Din (2) şi (4) şi $O = O' \Rightarrow BCFG$ este paralelogram.	**1p**
b)	Într-un patrulater convex suma diagonalelor este mai mare decât suma a două laturi opuse $\Rightarrow$ în $BDFE$: $ED + BF > EF + BD$; în $ECDG$: $ED + CG > EC + DG$; în $BCFG$: $CG + BF > BG + CF$.	**2p**
	Însumează cele trei relaţii și obţine: $2(ED + BF + CG) > 2FC + 2BG = 4FC$	**1p**
	Finalizare	**1p**

4. Fie patrulaterul convex *ABCD* cu $P \in (DC)$ astfel încât $AP \parallel BC$ și $BP \parallel AD$.

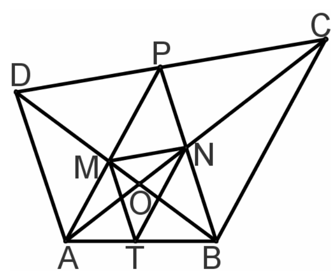
a) (4p) Dacă $AP \cap BD = \{M\}$ și $BP \cap AC = \{N\}$, arătați că $MN \parallel DC$.

b) (3p) Dacă $T \in (AB)$ astfel încât $NT \parallel AP$, atunci $[MT] \equiv [PN]$.

***

Soluție:

a) Fie *O* centrul patrulaterului *ABCD*.



Pentru că $\left.\begin{array}{l} BP \parallel AD \xrightarrow{T.Thales} \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{ON}{OA} \\ AP \parallel BC \xrightarrow{T.Thales} \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{OA}{OC} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{OM}{OD} = \dfrac{ON}{OC}$

(prin înmulțirea celor două relații, membru cu membru)

$\Rightarrow MN \parallel DC$ (conform reciprocei teoremei lui Thales);

b) Pentru că $NT \parallel AP \xrightarrow{T.Thales} \dfrac{AT}{TB} = \dfrac{AN}{NC}$; pentru că $NM \parallel CD \xrightarrow{T.Thales} \dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AM}{MP}$, de unde $\dfrac{AT}{TB} = \dfrac{AM}{MP}$ și conform reciprocei teoremei lui Thales avem $MT \parallel BP$. Așadar, *TNPM* este paralelogram și $[MT] \equiv [PN]$.

Barem:

a)	$AC \cap BD = \{O\}$; $BP \parallel AD \xrightarrow{T.Thales} \dfrac{BO}{OD} = \dfrac{ON}{OA}$; $AP \parallel BC \xrightarrow{T.Thales} \dfrac{OM}{OB} = \dfrac{AO}{OC}$	**2p**
	Înmulțește relațiile, membru cu membru, și obține $\dfrac{OM}{OD} = \dfrac{ON}{OC}$	**1p**
	Finalizare, $MN \parallel DC$ (conform reciprocei teoremei lui Thales);	**1p**
b)	$NT \parallel AP \xrightarrow{T.Thales} \dfrac{AT}{TB} = \dfrac{AN}{NC}$ (1); $NM \parallel CD \xrightarrow{T.Thales} \dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AM}{MP}$ (2)	**1p**
	Din (1) și (2) obține $\dfrac{AT}{TB} = \dfrac{AM}{MP} \xrightarrow{R.T.Thales} MT \parallel BP$	**1p**
	TNPM este paralelogram $\Rightarrow [MT] \equiv [PN]$	**1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.