BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA a VI–a

1. a) (4p) Arătați că $P+Q<1009$, dacă $P=\frac{1+2+2^2}{2\cdot 3}+\frac{1+4+4^2}{4\cdot 5}+\frac{1+6+6^2}{6\cdot 7}+....+\frac{1+2016+2016^2}{2016\cdot 2017}$

şi $Q=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+....+\frac{1}{2015\cdot 2016}$.

prof. Laura Schroder, Câmpulung Moldovenesc

b) (3p) Determinaţi $a\in\mathbb{N}$, $a>1$ ştiind că $a^{2017}+7$ este divizibil cu $a-1$.

prof. Ana Marcela Popa, Rădăuți

<u>Soluţie:</u>

a) $P=\frac{1+2+2^2}{2\cdot 3}+\frac{1+4+4^2}{4\cdot 5}+\frac{1+6+6^2}{6\cdot 7}+....+\frac{1+2016+2016^2}{2016\cdot 2017}=$

$=\frac{1+2(1+2)}{2\cdot 3}+\frac{1+4(1+4)}{4\cdot 5}+\frac{1+6(1+6)}{6\cdot 7}+....+\frac{1+2016(1+2016)}{2016\cdot 2017}=$

$=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2(1+2)}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{4(1+4)}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{6(1+6)}{6\cdot 7}+....+\frac{1}{2016\cdot 2017}+\frac{2016(1+2016)}{2016\cdot 2017}=$

$=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{4\cdot 5}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+\frac{6\cdot 7}{6\cdot 7}+....+\frac{1}{2016\cdot 2017}+\frac{2016\cdot 2017}{2016\cdot 2017}=$

$=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+....+\frac{1}{2016\cdot 2017}+\underbrace{1+1+...+1}_{\text{de 1008 ori}}=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+....+\frac{1}{2016\cdot 2017}+1008$

$P+Q=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+....+\frac{1}{2016\cdot 2017}+1008+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+....+\frac{1}{2015\cdot 2016}=$

$=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 7}+....+\frac{1}{2015\cdot 2016}+\frac{1}{2016\cdot 2017}+1008=$

$=\frac{2-1}{1\cdot 2}+\frac{3-2}{2\cdot 3}+\frac{4-3}{3\cdot 4}+\frac{5-6}{4\cdot 5}+....+\frac{2017-2016}{2016\cdot 2017}+1008=$

$=\frac{2}{1\cdot 2}-\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{3}{2\cdot 3}-\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{4}{3\cdot 4}-\frac{3}{3\cdot 4}+\frac{5}{4\cdot 5}-\frac{4}{4\cdot 5}+....+\frac{2017}{2016\cdot 2017}-\frac{2016}{2016\cdot 2017}+1008=$

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+....+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}+1008=1-\frac{1}{2017}+1008=1009-\frac{1}{2017}<1009.$

b) $a^{2017}+7=\left((a-1)+1\right)^{2017}+7=M_{a-1}+1+7=M_{a-1}+8$

Dar $(a-1)/\left(a^{2017}+7\right)$ ne conduce la $(a-1)/\left(M_{a-1}+8\right)$ de unde obținem că $(a-1)/8$ iar de aici $a-1\in D_8\Rightarrow a-1\in\{1,2,4,8\}\Rightarrow a\in\{2,3,5,9\}$

<u>Barem:</u>

a) Aduce P la forma $P=\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5}+\frac{1}{6\cdot 7}+....+\frac{1}{2016\cdot 2017}+1008$	**2p**
Calculează $P+Q=1009-\frac{1}{2017}<1009$.	**2p**
b) Arată că $a^{2017}+7=M_{a-1}+8$	**1p**
Din $(a-1)/\left(a^{2017}+7\right)$ deduce $(a-1)/8$	**1p**
Finalizează $a\in\{2,3,5,9\}$	**1p**

2. (7p) Determinați numerele de forma $\overline{abcd}$, scrise în baza zece, care îndeplinesc simultan condițiile: (i) $\left(\overline{ab},\overline{cd}\right)=1$; (ii) $\left(\overline{ab},\overline{cd}-2\right)=5$; (iii) $\dfrac{\overline{cd}-2}{\overline{ab}}=0,75$. Prin (m,n) s-a notat cel mai mare divizor comun al numerelor *m* și *n*.

prof. Gheorghe Iacoviță, Frătăuții Vechi

Soluție: Condiția (iii) $\Leftrightarrow \dfrac{\overline{cd}-2}{\overline{ab}}=\dfrac{3}{4}\Leftrightarrow 4\left(\overline{cd}-2\right)=3\overline{ab}$

Din condiția (ii) $\Rightarrow \overline{ab}=5k,\ \overline{cd}-2=5p$, cu *k* și *p* prime între ele.

Atunci avem $4\cdot 5p=3\cdot 5k\Leftrightarrow 4p=3k$ de unde obținem $k\,\vdots\,4$ și $p\,\vdots\,3$.

Din $k\,\vdots\,4\Rightarrow k=4t$ care înlocuit în relația $4p=3k$ ne conduce la $p=3t\Rightarrow (k,p)=t=1$ deoarece *k* și *p* sunt prime între ele. Atunci $k=4$ și $p=3$ de unde obținem $\overline{ab}=20$ și $\overline{cd}=17$ care verifică și condiția (i).

Deci $\overline{abcd}=2017$.

Barem:

Din (iii) obține $4\overline{cd}-8=3\overline{ab}$	**2p**
Din condiția (ii) $\Rightarrow \overline{ab}=5k,\ \overline{cd}-2=5p$, cu *k* și *p* prime între ele	**1p**
Atunci avem $4\cdot 5p=3\cdot 5k\Leftrightarrow 4p=3k$ de unde obținem $k\,\vdots\,4$ și $p\,\vdots\,3$	**1p**
Determină $\overline{ab}=20$ și $\overline{cd}=17$	**1p**
Finalizează și obține $\overline{abcd}=2017$	**2p**

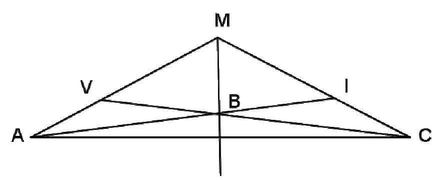
3. Fie triunghiul isoscel *MAC*, cu unghiul *AMC* obtuz. Pe laturile $[MA]$ și $[MC]$ se consideră punctele *V*, respectiv *I* astfel încât $\sphericalangle MAI\equiv\sphericalangle MCV$. Arătați că:

a) (3p) $[VA]\equiv[IC]$;

b) (4p) $[MB$ este bisectoarea unghiului *AMC*, unde $\{B\}=AI\cap CV$.

prof. Claudia Marchitan, Suceava

Soluție:



a) Din triunghiul *MAC* isoscel cu unghiul *AMC* obtuz obținem că ΔMAC isoscel cu baza $[AC]\Rightarrow[MA]\equiv[MC]$.

Comparăm ΔMAI și ΔMCV:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ \sphericalangle IMA\equiv\sphericalangle VMC \text{ (unghi comun)}\\ 2)\ [MA]\equiv[MC]\ (\Delta MAC \text{ isoscel cu baza } [AC])\\ 3)\ \sphericalangle MAI\equiv\sphericalangle MCV \text{ (ipoteză)}\end{array}\right\}\stackrel{U.L.U}{\Rightarrow}\ \Delta MAI\equiv\Delta MCV\Rightarrow[MI]\equiv[MV].$$

Din $[MA]\equiv[MC]$ și $[MV]\equiv[MI]$ obținem că $[VA]\equiv[IC]$ (diferență de segmente congruente).

b) Comparăm ΔVAB și ΔICB:

$$\left.\begin{array}{l}1)\ [VA]\equiv[IC] \text{ (de la a))}\\ 2)\ \sphericalangle VAB\equiv\sphericalangle ICB \text{ (ipoteză)}\\ 3)\ \sphericalangle ABV\equiv\sphericalangle CBI \text{ (unghiuri opuse la vârf)}\end{array}\right\}\stackrel{L.U.U}{\Rightarrow}\ \Delta VAB\equiv\Delta ICB\Rightarrow[AB]\equiv[CB](*)$$

Comparăm ΔMAB și ΔMCB :

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ [MA]\equiv[MC]\ (\Delta MAC \text{ isoscel cu baza } [AC]) \\ 2)\ \sphericalangle MAB \equiv \sphericalangle MCB \text{ (ipoteză)} \\ 3)\ [AB]\equiv[CB] \text{ (din (*))} \end{array}\right\} \overset{L.U.L.}{\Rightarrow} \Delta MAB \equiv \Delta MCB \Rightarrow \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMB .$$

Din $[MB \subset Int(\sphericalangle AMC)$ și $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMB$ obținem că $[MB$ este bisectoarea unghiului AMC.

<u>Barem.</u>

a) Figura	**1p**
Arată că $\Delta MAI \equiv \Delta MCV \Rightarrow [MI]\equiv[MV]$ și apoi deduce că $[VA]\equiv[IC]$	**2p**
b) Arată că $\Delta VAB \equiv \Delta ICB \Rightarrow [AB]\equiv[CB]$	**2p**
Arată că $\Delta MAB \equiv \Delta MCB \Rightarrow \sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMB$	**1p**
Din $[MB \subset Int(\sphericalangle AMC)$ și $\sphericalangle AMB \equiv \sphericalangle CMB$ obține că $[MB$ este bisectoarea unghiului AMC.	**1p**

Notă: Orice altă soluţie corectă se va puncta corespunzător.